Repetition §4.2 und §5.10

I beliebige Menge. K Körper.

$K^I := \{\text{Abbildungen } I \to K,\ i \mapsto x_i\} = \{(x_i)_{i\in I} \mid \text{alle } x_i \in K\}$ K-Vektorraum.

$K^{(I)} := \{(x_i)_{i\in I} \in K^I \mid \text{fast alle } x_i = 0\}$

$= \{(x_i)_{i\in I} \in K^I \mid \exists I' \subset I \text{ endlich}: \forall i \in I \setminus I':\ x_i = 0\}$

$K^{(I)} = K^I$ genau dann wenn $|I| < \infty$, sonst $\boxed{K^{(I)} \subsetneqq K^I}$.

Für jedes $i \in I$ setze $e_i := (\delta_{ij})_{j\in I} \in K^{(I)}$

Die sind alle $\neq 0$ und alle verschieden.

Für alle $(x_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ ist (*) $\boxed{\sum_{i\in I}{}' x_i e_i = \sum_{i\in I}{}' x_i (\delta_{ij})_j = \Big(\sum_{i\in I}{}' x_i \delta_{ij}\Big)_j = (x_j)_j}$

$\Rightarrow$ Jedes Element von $K^{(I)}$ ist eine eindeutige Linearkombination der e_i.

$\Rightarrow$ $E := \{e_i \mid i \in I\}$ ist eine Basis von $K^{(I)}$

$\Rightarrow$ $\dim K^{(I)} = |E| = |I|$.

Vorsicht: Die Rechnung (*) ergibt keinen Sinn für $(x_i)_i \in K^I \setminus K^{(I)}$.

Jedes $(x_i)_i \in K^I \setminus K^{(I)}$ ist linear unabhängig von E.

Für jede Teilmenge $J \subset I$ sei $e_J := \left(\begin{cases} 1 & \text{falls } i \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)_{i \in I}$.

Ist $|I| = \infty$:

Für geeignete J mit $|J| = |I \setminus J| = \infty$ erhält man mehr als $|I|$ linear unabhängige e_J.

Also ist $\dim(K^I) > |I| = \dim(K^{(I)})$.

Dualraum: $(K^{(I)})^\vee = \mathrm{Hom}_K(K^{(I)}, K)$

Eine Linearform $K^{(I)} \to K$ anzugeben ist äquivalent dazu, ihre Einschränkung auf E anzugeben. Dies ist eine beliebige Abb. $E \to K$.

$$(K^{(I)})^\vee \xrightarrow{\text{bijektiv}} K^I \qquad \text{Isomorphismus.}$$
$$\ell \longmapsto (\ell(e_i))_{i \in I}$$

Umkehrung:
$$K^I \longrightarrow (K^{(I)})^\vee = \mathrm{Hom}_K(K^{(I)}, K)$$
$$(y_i)_{i \in I} \longmapsto \left[(x_i)_{i \in I} \longmapsto \boxed{\sum_{i \in I}{}' x_i y_i} \right]$$
$$e_i = (\delta_{ij})_j \longmapsto \sum_j{}' \delta_{ij} y_j = y_i.$$

Bem.: (**) $K^{(I)} \longrightarrow (K^I)^\vee = \mathrm{Hom}_K(K^I, K)$ injektiver Homomorphismus.
$$(y_i)_{i \in I} \longmapsto \left[(x_i)_{i \in I} \longmapsto \boxed{\sum_{i \in I}{}' x_i y_i} \right]$$

$$(K^{(I)})^\vee \cong K^I$$

$$((K^{(I)})^\vee)^\vee \cong (K^I)^\vee$$

$$\begin{tikzcd}
((K^{(I)})^\vee)^\vee & & (K^I)^\vee \\
& K^{(I)} \arrow[ul, "ev"] \arrow[ur, hook, "(**)"'] &
\end{tikzcd}$$

I unendlich $\Longrightarrow$

$$\dim K^{(I)} < \dim K^I$$

$$= \dim (K^{(I)})^\vee < \dim ((K^{(I)})^\vee)^\vee$$